Nietrost Bernhard, bernhard.nietrost@htl-steyr.ac.at

Animation von Bezierkurven

- Mathematische / Fachliche Inhalte in Stichworten:

  Parameterdarstellung von Bezierkurven, Animation, Variation der Punkte.

- Kurzzusammenfassung

  Animation und Theorie zur Entstehung von Bezierkurven verschiedener Ordnung.

- Didaktische Überlegungen / Zeitaufwand: [***optional***]

  Das Arbeitsblatt kann mit geschlossenen Bereichen als Grundlage für die Erarbeitung der Eigenschaften der Bezierkurve verwendet werden.
  Die Animationen dienen zur Illustration der Entstehung von Bezierkurven.
  Die Punkte können einfach verändert werden und damit der Einfluss auf die Form der Bezierkurve studiert werden.

- Lehrplanbezug (bzw. Gegenstand / Abteilung / Jahrgang):

  Angewandte Mathematik, 2. und 3. Jahrgang, alle Abteilungen - vor allem Maschinenbau, Maschineningenieurwesen, Mechatronik,.....

- Mathcad-Version:

  Mathcad 15

- Literaturangaben:

  Timschl: Ingenieurmathematik 3

- Anmerkungen bzw. Sonstiges: [***optional***]

  Bezierkurven wurden Anfang der 1960er Jahre ziemlich zeitgleich und unabhängig voneinander von den beiden französischen Ingenieren Pierre Bezier und Paul de Casteljau bei Renault bzw. Citroen für den Einsatz in der computerunterstützten Konstruktion entwickelt.
  Mit Bezierkurven können zwei Punkte miteinander verbunden werden wobei die Anschlusstellen bestimmte Bedingungen bezüglich Stetigkeit erfüllen.

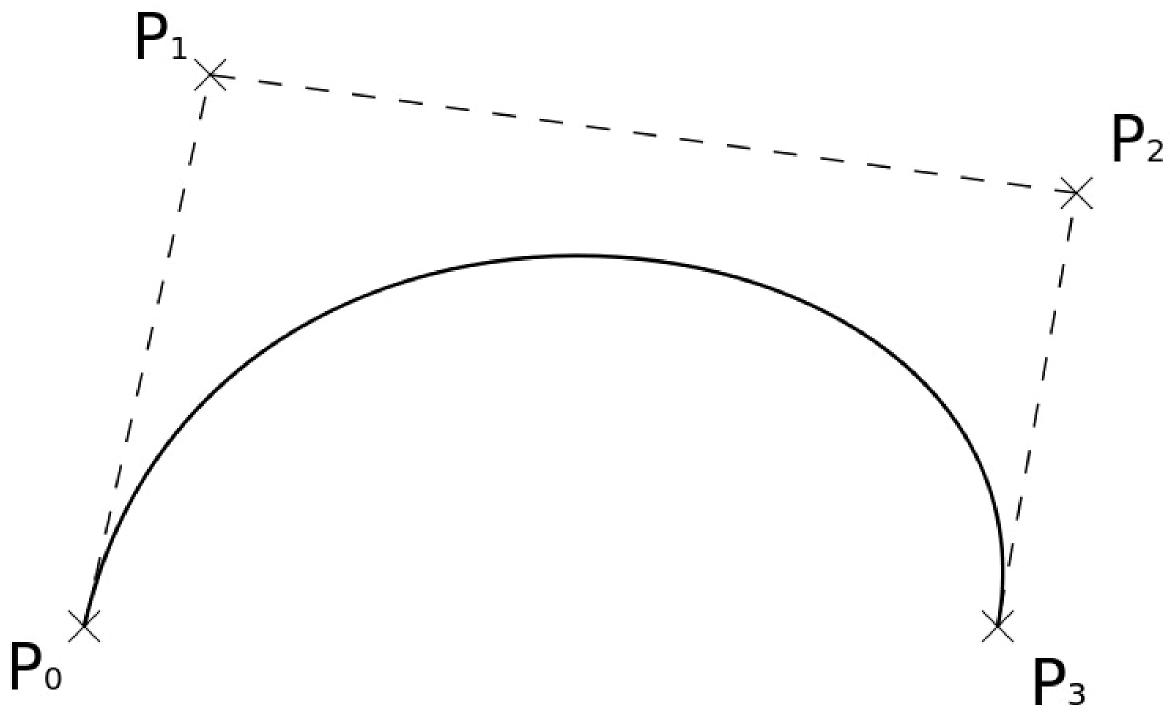
  Einsatzmöglichkeiten: Viele CAD Programme haben Bezierkurven (in 2D und 3D) implementiert; Vektorgraphiken (zB: SVG), Schriftarten (TrueType, Postscript Type1, ...)

  Die gelb hinterlegten Punkte können verändert werden um die Eigenschaften der Bezierkurven zu untersuchen.

  Grün hinterlegte Teile sind fertige Animationen (DOPPELKLICK)

  Die Animationen in diesem Arbeitsblatt wurden vom Michael Krydl, Schüler der 3AHMIZ 2012/13 der HTL Steyr erstellt.

Etwas Theorie zur Bézierkurve



Definition: Die Bezierkurve wird parametrisch wird nach der Formel $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} \left[\binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} \cdot P_i \right]$ mit

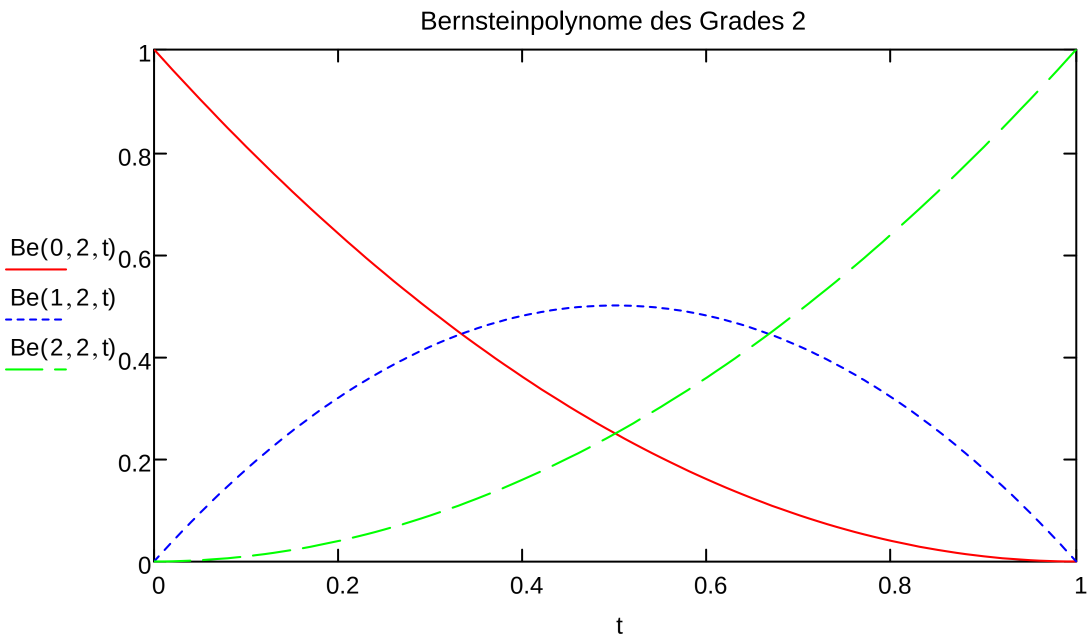
$0 \le t \le 1$ gebildet. P_i sind die Koordinaten der vorgegebenen Punkte.

Folgende Eigenschaften gelten für Bezierkurven:

- Eine Bezierkurve verbindet den Anfangspunkt P_0 mit dem Endpunkt P_n. Diese beiden Punkt werden auch als Stützstellen bezeichnet.
- Zwischen diesen beiden Punkten gibt es eine beliebige Anzahl (0,1,2,3,...n-1) von Kontrollpunkten. Diese Kontrollpunkte bestimmen die Form der Kurve.
- Der Ausdruck $B(i,n) = \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$ in der parametrischen Darstellung ergibt die Bernsteinpolynome des Grades n. Zu jedem Grad gibt es n verschiedene Bernsteinpolynome (i = 0,1,2,...n). In der untenstehenden Graphik sind diese für n = 2 dargestellt. Deutlich sind die Symmetrieeigenschaften zu erkennen (symmetrisch bezüglich einer senkrechten Gerade t = 0,5).

Definition des Bernsteinpolynoms:

$Be(i,n,t) := \text{combin}(n,i) \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$ $\qquad t := 0, 0.01 .. 1$



- n wird als Grad der Bezierkurve bezeichnet, die durch n+1 Punkte bestimmt wird. (Anfangs- und Endpunkt sowie n-1 Kontrollpunkte)
  n = 1 ist die Strecke zwischen Anfangs und Endpunkt (linear).
  n = 2 beinhaltet einen Kontrollpunkt (quadratisch).
  n = 2 beinhaltet zwei Kontrollpunkte (kubisch) und wird sehr häufig verwendet.
- Die Strecken P_0 P_1 und P_{n-1} P_n sind Tangenten an die Bezierkurve. Je weiter P_1 bzw. P_{n-1} von den benachbarten Stützstellen entfernt sind, desto ausgeprägter ist diese Tangenteneigenschaft. (in der untenstehenden Graphik einer Bezierkurve zweiten Grades sind dies die strichlierten Linien)
- Die Bezierkurve verläuft innerhalb der konvexen Hülle, die von den Punkten P_i gebildet wird. (in der untenstehenden Graphik einer Bezierkurve zweiten Grades ist dies das Dreieck aus den drei Punkten P0, P1, P2, bei den dargestellten Bezierkurven dritter und vierter Ordnung ist jeweils der Punkt P1 innerhalb der konvexen Hülle und nicht Eckpunkt.)

Bézierkurve 2.Grades

$P0 := \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P1 := \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ $P2 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ Definition der drei Punkte

$Px := \begin{pmatrix} P0_0 & P1_0 & P2_0 \end{pmatrix}$ $Py := \begin{pmatrix} P0_1 & P1_1 & P2_1 \end{pmatrix}$ Bestimmung des Darstellungsbereichs

$Xmax := \max(Px) + 1$ $Xmin := \min(Px) - 1$ $Ymax := \max(Py) + 1$ $Ymin := \min(Py) - 1$

$t := 0 .. 1$ $tt := 0, 0.01 .. 1$

$A(t) := P0 + (P1 - P0) \cdot t$

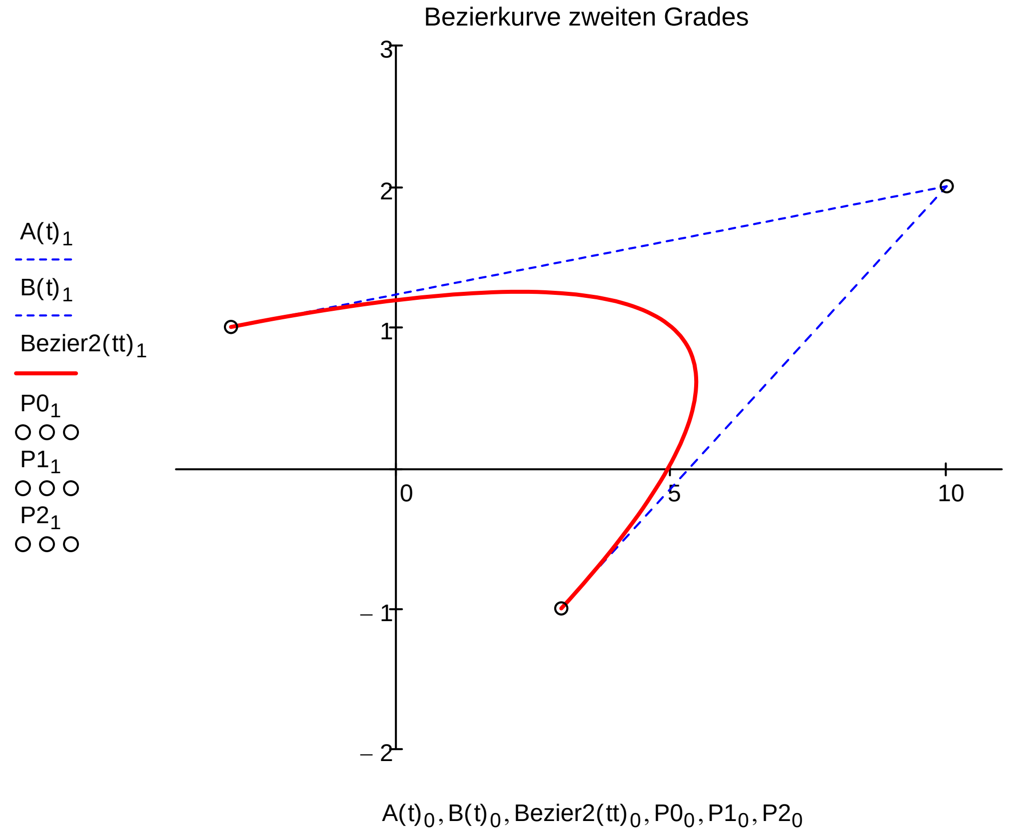
$B(t) := P1 + (P2 - P1) \cdot t$

Tangenten an Bezierkurve (blau strichliert)

$n := 2$ $\quad P_0 := P0$ $\quad P_1 := P1$ $\quad P_2 := P2$

$$Bezier2(t) := \left[\sum_{i=0}^{n}\left[combin(n,i)\cdot t^i\cdot(1-t)^{n-i}\cdot P_i\right]\right]$$

Defintion der Bezierkurve (rot)



Konstruktion der Bezierkurve zweiten Grades

$t := 0..1$ $\quad tt := 0, 0.01..\frac{FRAME}{100}$ $\quad ttt := \frac{FRAME}{100}$

Animationsvariable

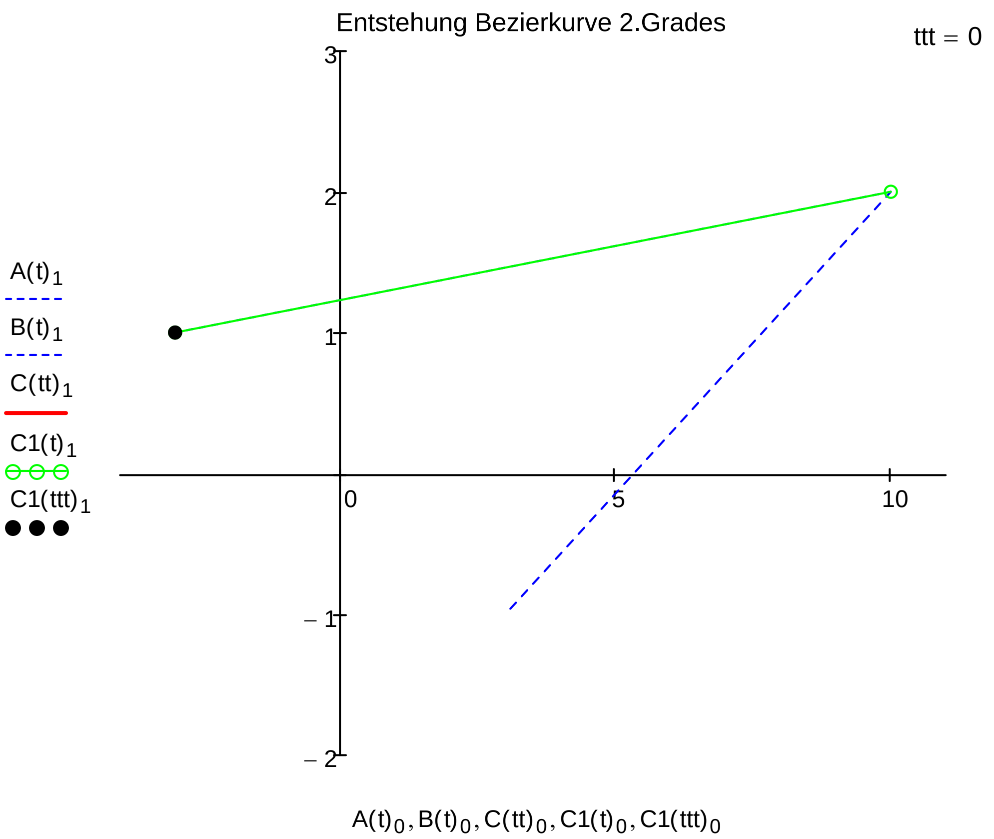
$A(t) := P0 + (P1 - P0)\cdot t$

$B(t) := P1 + (P2 - P1)\cdot t$

$C(t) := A(t) + (B(t) - A(t))\cdot t$ $\quad C1(t) := A(ttt) + (B(ttt) - A(ttt))\cdot t$

Gleichzeitig laufen folgende Bewegungen ab:
Ein Punkt (A(t)) läuft von P0 zu P1, ein weitere Punkt (B(t)) von P1 zu P2, diese beiden Punkte bilden die Strecke AB (Grün), die immer Tangente an die Bezierkurve ist. Auf AB läuft der Punkt C von A nach B und bildet die Bezierkurve.
Extras: Animation mit FRAME von 0 bis 100! (Rahmen mit Maus festlegen) oder untenstehender Hyperlink

Hyperlink zu Animation (Doppelklick)



Bézierkurve 3.Grades

$P0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $P2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $P3 := \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Px := \begin{pmatrix} P0_0 & P1_0 & P2_0 & P3_0 \end{pmatrix}$ $Py := \begin{pmatrix} P0_1 & P1_1 & P2_1 & P3_1 \end{pmatrix}$

$Xmax := \max(Px) + 1$ $Xmin := \min(Px) - 1$ $Ymax := \max(Py) + 1$ $Ymin := \min(Py) - 1$

$t := 0 .. 1$ $tt := 0, 0.002 .. 1$

$A(t) := P0 + (P1 - P0) \cdot t$

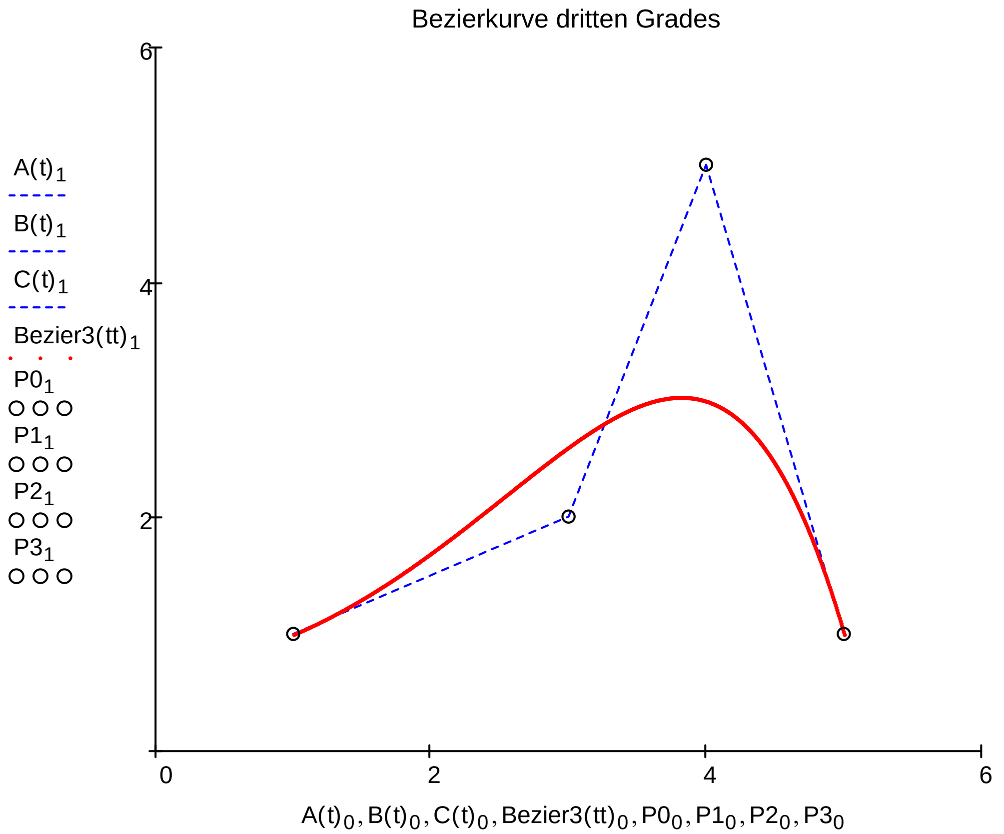
$B(t) := P1 + (P2 - P1) \cdot t$

$C(t) := P2 + (P3 - P2) \cdot t$

$n := 3 \qquad P_0 := P0 \qquad P_1 := P1 \qquad P_2 := P2 \qquad P_3 := P3$

$$\mathrm{Bezier3}(t) := \left[\sum_{i=0}^{n} \left[\mathrm{combin}(n,i) \cdot t^{i} \cdot (1-t)^{n-i} \cdot P_i\right]\right]$$

Defintion der Bezierkurve (rot)



Die konvexe Hülle wird in diesem Fall nur durch das Dreieck P0, P2, P3 gebildet!

Konstruktion der Bezierkurve dritten Grades

$t := 0..1 \qquad tt := 0, 0.01 .. \frac{FRAME}{100} \qquad ttt := \frac{FRAME}{100}$

Animationsvariable

$A(t) := P0 + (P1 - P0) \cdot t$

$B(t) := P1 + (P2 - P1) \cdot t$

$C(t) := P2 + (P3 - P2) \cdot t$

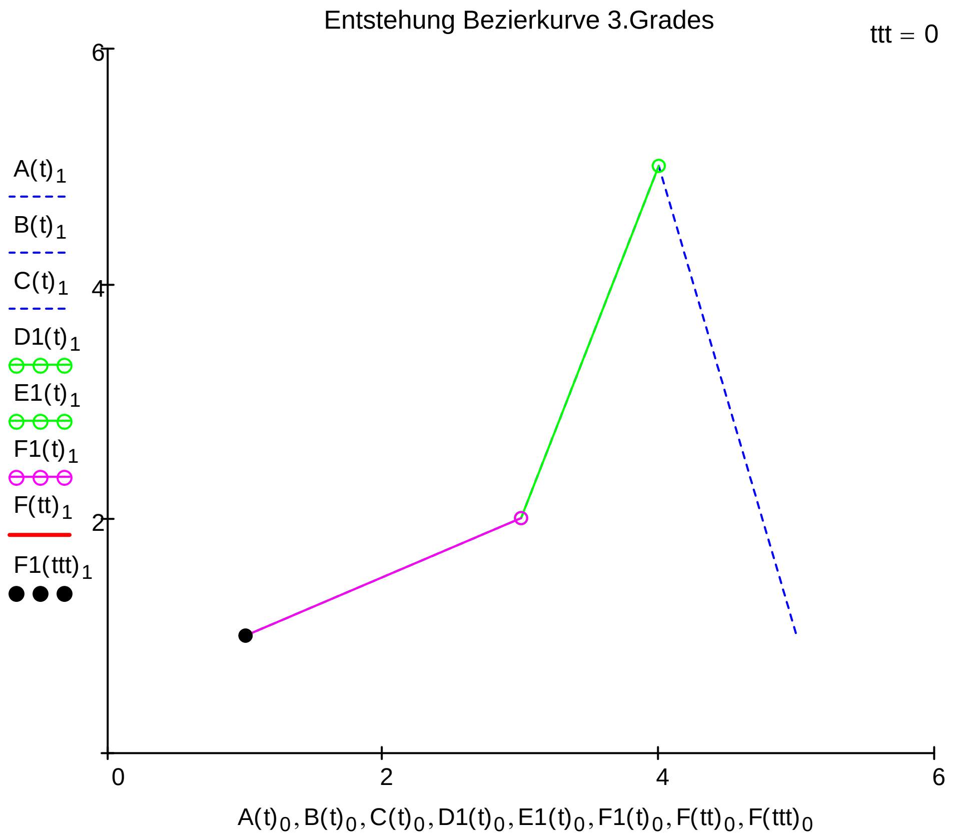
$D(t) := A(t) + (B(t) - A(t)) \cdot t$ $D1(t) := A(ttt) + (B(ttt) - A(ttt)) \cdot t$

$E(t) := B(t) + (C(t) - B(t)) \cdot t$ $E1(t) := B(ttt) + (C(ttt) - B(ttt)) \cdot t$

$F(t) := D(t) + (E(t) - D(t)) \cdot t$ $F1(t) := D(ttt) + (E(ttt) - D(ttt)) \cdot t$

Gleichzeitig laufen folgende Bewegungen ab:
Ein Punkt (A(t)) läuft von P0 zu P1, ein weitere Punkt (B(t)) von P1 zu P2, und noch einer von P2 zu P3 (C(t)). Die Punkte A und B sowie B und C werden wiederum durch Strecken (Grün) verbunden auf denen die Punkte D und E laufen. Die Strecke DE (violett) ist immer Tangente an die Bezierkurve. Auf DE läuft der Punkt F und bildet die Bezierkurve.
Extras: Animation mit FRAME von 0 bis 100! (Rahmen mit Maus festlegen) oder untenstehender Hyperlink

Hyperlink 1 zu Animation Hyperlink 2 zu Animation



Bézierkurve 4.Grades

$P0 := \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ $P1 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $P2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $P3 := \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P4 := \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$Px := (P0_0 \;\; P1_0 \;\; P2_0 \;\; P3_0 \;\; P4_0)$ $Py := (P0_1 \;\; P1_1 \;\; P2_1 \;\; P3_1 \;\; P4_1)$

$Xmax := \max(Px) + 1$ $Xmin := \min(Px) - 1$ $Ymax := \max(Py) + 1$ $Ymin := \min(Py) - 1$

$A(t) := P0 + (P1 - P0) \cdot t$

$B(t) := P1 + (P2 - P1) \cdot t$

$C(t) := P2 + (P3 - P2) \cdot t$

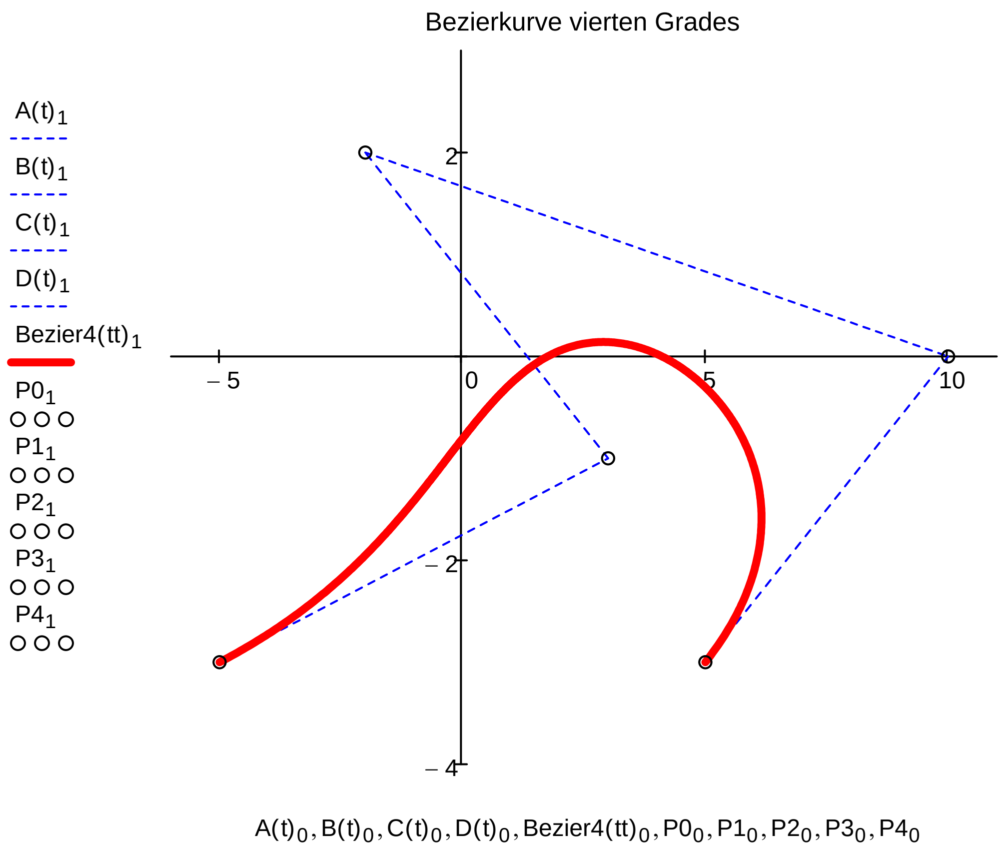
$D(t) := P3 + (P4 - P3) \cdot t$

$t := 0 .. 1$ $tt := 0, 0.002 .. 1$

$n := 4$ $P_0 := P0$ $P_1 := P1$ $P_2 := P2$ $P_3 := P3$ $P_4 := P4$

$$Bezier4(t) := \left[\sum_{i=0}^{n} \left[combin(n,i) \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} \cdot P_i\right]\right]$$

Defintion der Bezierkurve (rot)



Die konvexe Hülle wird von den Punkten P0, P2, P3, P4, P5 gebildet.

Konstruktion der Bezierkurve vierten Grades

$t := 0..1$ $tt := 0, 0.01 .. \frac{FRAME}{100}$ $ttt := \frac{FRAME}{100}$ Animationsvariable

$A(t) := P0 + (P1 - P0) \cdot t$

$B(t) := P1 + (P2 - P1) \cdot t$

$C(t) := P2 + (P3 - P2) \cdot t$

$D(t) := P3 + (P4 - P3) \cdot t$

$E(t) := A(t) + (B(t) - A(t)) \cdot t$ $E1(t) := A(ttt) + (B(ttt) - A(ttt)) \cdot t$

$F(t) := B(t) + (C(t) - B(t)) \cdot t$ $F1(t) := B(ttt) + (C(ttt) - B(ttt)) \cdot t$

$G(t) := C(t) + (D(t) - C(t)) \cdot t$ $G1(t) := C(ttt) + (D(ttt) - C(ttt)) \cdot t$

$H(t) := E(t) + (F(t) - E(t)) \cdot t$ $H1(t) := E(ttt) + (F(ttt) - E(ttt)) \cdot t$

$I(t) := F(t) + (G(t) - F(t)) \cdot t$ $I1(t) := F(ttt) + (G(ttt) - F(ttt)) \cdot t$

$J(t) := H(t) + (I(t) - H(t)) \cdot t$ $J1(t) := H(ttt) + (I(ttt) - H(ttt)) \cdot t$

Gleichzeitig laufen folgende Bewegungen ab:
Ein Punkt (A(t)) läuft von P0 zu P1, ein weitere Punkt (B(t)) von P1 zu P2, ... bis zu P4. Die Punkte A und B sowie B und C usw.... werden wiederum durch Strecken (Grün) verbunden auf denen die Punkte E, F und G laufen. Diese drei Punkte bilden wiederum zwei Strecken auf denen die Punkte H uns I laufen. Die Strecke HI (blau) ist immer Tangente an die Bezierkurve. Auf HI (violett) läuft der Punkt J und bildet die Bezierkurve.
Extras: Animation mit FRAME von 0 bis 100! (Rahmen mit Maus festlegen) oder untenstehender Hyperlink

Hyperlink 1 zu Animation (Welle) Hyperlink 2 zu Animation (Schleife) Hyperlink 3 zu Animation (Welle)

Hyperlink 4 zu Animation (geschlossen, Rechteckige Hülle) Hyperlink 5 zu Animation

Entstehung Bezierkurve 4.Grades

ttt = 0